§ : 1η { ΟΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ }

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ – ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Λέμε ότι η f αναλυτική (γύρω από το x_0) εάν $\exists\, r>0$: f να αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισης $(x_0-r,\ x_0+r)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Για τη διαφορική εξίσωση μορφής
(Ε) $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ με $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$
πραγματικές συναρτήσεις και ας είναι $x_0 \in I$
Τότε το x_0 : ομαλό σημείο εάν
(α) $a_2(x_0) \neq 0$ και (β) $\frac{a_1}{a_2}(x)$, $\frac{a_0}{a_2}(x)$ αναλυτικές στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Ας είναι $x_0 \in I$ ένα ομαλό σημείο της (Ε)
και $\frac{a_1}{a_2}(x) = P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n$, $|x-x_0|<R_1$
και $\frac{a_0}{a_2}(x) = Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n$, $|x-x_0|<R_2$ } δηλαδή αναλυτικές
Εάν τώρα, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ τότε θα υπάρχουν $c_n\ (n\geq 2)$
ώστε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, να έχει θετική ακτίνα
σύγκλισης $r \geq \min\{R_1, R_2\}$ και ταυτόχρονα η συνάρτηση
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ να είναι λύση της (Ε) η οποία
πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(x_0)=c_0$ και $y'(x_0)=c_1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να βρεθούν τα ομαλά σημεία, τα κανονικά και μη κανονικά ανώμαλα σημεία για καθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις:

α. $y'' + (\cos x) y' + e^x \cdot y = 0$, $x\in\mathbb{R}$
β. $(x-2) y'' + (\sin 2x) y' + (x^2+1) y = 0$, $x\in\mathbb{R}$
γ. $y'' + |x| \cdot y' + (x+1)^{1/3} \cdot y = 0$, $x\in\mathbb{R}$
δ. $(x^4 - x^2) y'' + (2x+1) y + x^2 \cdot (x+1) y = 0$, $x\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι:
$a_2(x) = 1 \neq 0$ και οι συναρτήσεις
$\frac{a_1}{a_2}(x) = \cos x$ και $\frac{a_0}{a_2}(x) = e^x$ αναλυτικές

σε κάθε σημείο στο σύνολο $\mathbb{R}$ (εφόσον μπορούν να γραφούν μέσω Taylor σε μορφή δυναμοσειράς:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{και} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα, κάθε πραγματικός αριθμός είναι ενα ομαλό σημείο

β) Παρατηρούμε ότι το $x-2$ μηδενίζεται στο 2.

• Για $x \neq 2$ έχουμε $a_2(x) \neq 0$

και $\frac{a_1}{a_2}(x) = \frac{\sin 2x}{x-2}$ και $\frac{a_0}{a_2}(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ είναι αναλυτικές για κάθε σημείο ανήκει στην πραγματική ευθεία

Άρα, κάθε πραγματικός και διαφορετικός από το 2 είναι ομαλό σημείο.

• Για $x=2$ έχουμε ότι το σημείο 2 είναι ανώμαλο και θα πρέπει να εξετάσουμε εαν πρόκειται για κανονικό ή μη κανονικό ανώμαλο σημείο

Ορισμός: Αν x_0 ανώμαλο σημείο τότε:

~ x_0 κανονικό εαν

$\exists A_1 = \frac{a_1}{a_2}(x) \cdot (x-x_0) : P_1 \to \mathbb{R}$, $x_0 \in P_1$
$\exists A_2 = \frac{a_0}{a_2}(x)(x-x_0)^2 : P_2 \to \mathbb{R}$, $x_0 \in P_2$ } αναλυτικές στο x_0

~ x_0 μη κανονικό εαν δεν είναι κανονικό σημείο.

Επανερχόμεθα στην άσκηση και έτσι εξετάζουμε εαν το σημείο 2 πρόκειται για κανονικό ανώμαλο.

$A_1 = \frac{\sin 2x}{\cancel{x-2}} \cancel{(x-2)} = \sin 2x$, Αναλυτική στο 2

$A_2 = \frac{x^2+1}{\cancel{x-2}} (x-2)^{\cancel{2}} = (x^2+1)(x-2)$, Αναλυτική στο 2

γ) $a_2(x) = 1 \neq 0$ και $\frac{a_1}{a_2}(x) = |x| = \begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ μη αναλυτική στο $x_0=0$

και $\frac{a_0}{a_2}(x) = (x+1)^{1/3} = \sqrt[3]{x+1}$ μη αναλυτική στο $x_0=-1$

Άρα, τα σημεία 0 και -1 Ανώμαλα

$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \cdot (x-0) = x \cdot |x|$ όχι αναλυτική στο 0

Άρα, το 0 ~~μη~~ κανονικό

$\frac{a_0(x)}{a_2(x)} (x+1)^2 = (x+1)^{1/3} \cdot (x+1)^2 = (x+1)^{7/3}$ όχι αναλυτική στο -1

Άρα, το -1 μη κανονικό

iv) $a_2(x) = x^4 - x^2$, όπου $x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = \pm 1$

- Για $x \neq 0$ και $x \neq \pm 1$ έχουμε

$a_2(x) \neq 0$ και $\frac{a_1}{a_2}(x) = \frac{2x+1}{x^4-x^2}$ και $\frac{a_0}{a_2}(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^4-x^2} = \frac{1}{x-1}$

Αναλυτικές συναρτήσεις

Άρα, τα σημεία στο $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$ ομαλά

- Για $x = 0$

$\frac{a_1}{a_2}(x)\,(x-0) = \frac{2x+1}{x^4-x^2} x = \frac{2x+1}{x(x^2-1)}$, μη Αναλυτική

Άρα το $x_0 = 0$ μη κανονικό ανώμαλο σημείο

- Για $x = 1$

$\frac{a_1}{a_2}(x) \cdot (x-1) = \frac{2x+1}{x^2\cancel{(x-1)}(x+1)} \cancel{(x-1)} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)}$, Αναλυτική

$\frac{a_0}{a_2}(x)\,(x-1)^2 = \frac{\cancel{x^2(x+1)}}{\cancel{x^2}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} (x-1)^2 = x-1$, Αναλυτική

Άρα, το $x_0 = 1$ κανονικό ανώμαλο σημείο

- Για $x = -1$

$\frac{a_0}{a_2}(x)\,(x+1)^2 = \frac{\cancel{x^2}(x+1)}{\cancel{x^2}\cancel{(x+1)}(x-1)} (x+1)^2 = \frac{(x+1)^2}{x-1}$, Αναλυτική

$\frac{a_1}{a_2}(x)\,(x+1) = \frac{2x+1}{x^2\cancel{(x+1)}(x-1)} \cancel{(x+1)} = \frac{2x+1}{x^2(x-1)}$, Αναλυτική

Άρα, $x_0 = -1$ κανονικό ανώμαλο σημείο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (Άσκηση 6.1 Λυμένες (Βιβλ. Χρίστου Φίλου) Αναλυτική λύση!!!)

Να επιλυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$(x^2-2x)y''+5(x-1)y'+3y=0$ για $y(1)=2$ και $y'(1)=-1$

ΛΥΣΗ

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα 1 εξετάζουμε τα κριτήρια:

$a_2(x)=x^2-2x \Rightarrow a_2(x_0=1)=1^2-2\cdot 1=-1\neq 0$

- $\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}=\dfrac{5(x-1)}{x^2-2x}=\dfrac{5(x-1)}{x^2-2x+1-1}=\dfrac{5(x-1)}{(x-1)^2-1}=-\dfrac{5(x-1)}{1-(x-1)^2}\overset{x-1=z}{=\!=}$

$=-\dfrac{5\cdot z}{1-z^2}=-5z\dfrac{1}{1-z^2}$ (1)

Γενικώς, η παράσταση

$\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots$ ως άθροισμα απείρων όρων Γ.Π.

(z ← λόγος γ.π.)

Τότε (1) θα είναι

$\dfrac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+\ldots$ ως άθροισμα απείρων όρων Γ.Π.

(z^2 ← λόγος γ.π.) για $|z|<1$

Δηλ. η (1) είναι:

$\dfrac{a_1}{a_2}(x)=-5z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-5)z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-5)\cdot(x-1)^{2n+1},\ |x-1|<\underset{R_1}{1}$

Δηλαδή η $\dfrac{a_1}{a_2}(x)$ συνάρτηση είναι αναλυτική

- $\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}=\dfrac{3}{x^2-2x}=-3\dfrac{1}{1-(x-1)^2}=-3\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-3)(x-1)^{2n},\ |x-1|<\underset{R_2}{1}$

Δηλαδή, η $\dfrac{a_0}{a_2}(x)$ αναλυτική συνάρτηση

Συνεπώς το $x_0=1$ ομαλό σημείο

Έστω $c_0=2$ και $c_1=-1$ καθώς επίσης ας είναι η δυναμοσειρά $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(x-1)^n$, για $|x-1|<1$ λύση του Π.Α.Τ. με ακτίνα σύγκλισης $R=1$.

Θα προσδιορίσουμε όλα τα c_n, $n\geq 2$

Έτσι, $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot c_n\cdot(x-1)^{n-1}$ και $y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)c_n\cdot(x-1)^{n-2}$

και αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση:

$(x^2-2x)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}+5(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot c_n(x-1)^{n-1}+3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n=0 \Leftrightarrow$

$((x-1)^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}+5(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot c_n(x-1)^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n=0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2} + 5(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n (x-1)^{n-1} + 3\cdot\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\, c_n\,(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n + 5\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n\cdot(x-1)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-1)^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot(n-1)\, c_n(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n + 5\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot c_n (x-1)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n = 0 \Leftrightarrow$$

(Προσοχή! → Η μετάβαση από τη $2^{η}$ γραμμή στην $3^{η}$ γραμμή αλλάζοντας το $n=2$ σε $n=0$ γίνεται διότι για $n=0$ και $n=0$ μηδενίζεται το άθροισμα $\sum_{n=0}^{1} n(n-1)c_n(x-1)^n$ οπότε δεν μας επηρεάζει. Ομοίως και για τον $3^{ο}$ όρο της παράστασης από $n=1$ σε $n=0$)

Άρα, συνεχίζοντας έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 5nc_n + 3c_n\right)(x-1)^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$n(n-1)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} + 5nc_n + 3c_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n^2+4n+3)c_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(n+2)\cancel{(n+1)}c_{n+2} + \cancel{(n+1)}(n+3)c_n = 0 \Leftrightarrow (n\geq 0)$$

$$c_{n+2} = \frac{n+3}{n+2}c_n, \quad n\geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι ο αναδρομικός τύπος έχει βήμα 2.

Έτσι, παίρνουμε τις περιπτώσεις ($1^{η}$) $n=2k$, ($2^{η}$) $n=2k+1$

($1^{η}$ περίπτωση): $n=2k\geq 0 \Rightarrow k\geq 0$

$$c_{2k+2} = \frac{2k+3}{2k+2}c_{2k}, \quad k\geq 0$$

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=k-1$

$$\cancel{c_2} = \frac{3c_0}{2}, \quad \cancel{c_4} = \frac{5\cancel{c_2}}{4}, \quad \cancel{c_6} = \frac{7\cancel{c_4}}{6}, \ldots, \quad c_{2k} = \frac{2k+1}{2k}\cancel{c_{2(k-1)}}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τότε:

$$c_{2k} = \frac{3\cdot5\cdot7\ldots(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2k)}c_0 = \frac{3\cdot5\cdot7\ldots(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2k)}\cdot 2, \quad k-1\geq 0 \Rightarrow k\geq 1$$

($2^{η}$ περίπτωση): $n=2k+1\geq 0 \Rightarrow k\geq 0$

$$c_{2k+3} = \frac{2k+4}{2k+3}c_{2k+1}, \quad k\geq 0$$

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=k-1$

$$\cancel{c_3} = \frac{4}{3}\cdot c_1, \quad \cancel{c_5} = \frac{6}{5}\cancel{c_3}, \quad \cancel{c_7} = \frac{8}{7}\cancel{c_5}, \ldots, \quad c_{2k+1} = \frac{2k+2}{2k+1}\cancel{c_{2k-1}}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τότε:

$$c_{2k+1} = \frac{4\cdot6\cdot8\ldots(2k+2)}{3\cdot5\cdot7\ldots(2k+1)}c_1 = \frac{4\cdot6\cdot8\ldots(2k+2)}{3\cdot5\cdot7\ldots(2k+1)}(-1), \quad k-1\geq 0 \Rightarrow k\geq 1$$

Επομένως, για κάθε x με $|x-1|<1$ είναι:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-1)^n = c_0 + c_1\cdot(x-1) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}(x-1)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1}(x-1)^{2k+1} =$$

$$= 2\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2k+1)}{\underbrace{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)}_{(2\cdot1)(2\cdot2)(2\cdot3)\cdots(2\cdot k)}}(x-1)^{2k}\right)-\left((x-1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overbrace{4\cdot6\cdot8\cdots(2k+2)}^{(2\cdot2)(2\cdot3)(2\cdot4)\cdots2(k+1)}}{3\cdot5\cdot7\cdots(2k+1)}(x-1)^{2k+1}\right)=$$

$$= 2\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2k+1)}{2^k\cdot k!}(x-1)^{2k}\right)-\left((x-1)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\cdot(k+1)!}{3\cdot5\cdot7\cdots(2k+1)}(x-1)^{2k+1}\right)=$$

$$= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{2^n\cdot n!}(x-1)^{2n}\right)-1\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n+1)!}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}(x-1)^{2n+1}\right).$$

οπου είναι λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. ορισμένη για
$|x-1|<1 \Rightarrow 0<x<2 \rightarrow \Delta(0,2)$.
Επί οι λύσεις

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{2^n n!}(x-1)^{2n}$$

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}(x-1)^{2n+1}.$$

γραμμικά ανεξάρτητες
$c_0=2,\ c_1=-1 \rightsquigarrow y_1(x)=\dots$
$c_0=2,\ c_1=-1 \rightsquigarrow y_2(x)=\dots$
$W(y_1,y_2)\neq 0.$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ (ΜΕΣΩ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΣ)

Άσκηση:

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$(E): y'' + x^2 \cdot y' + 2xy = 0$ στο $x_0 = 0$.

Για την παραπάνω δοσμένη διαφορική εξίσωση να υπολογίσετε τους πρώτους 5 διαδοχικούς όρους της λύσης της $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

ΛΥΣΗ

Βήμα 1ο (εφόσον το $x_0=0$ ομαλό σημείο)

Θεωρούμε ως λύση της διαφορικής εξίσωσης τη δυναμοσειρά:

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Έπειτα παραγωγίζουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης δύο φορές με σκοπό να αντικαταστήσουμε στην (E)

Άρα, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ και $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

Βήμα 2ο

Αντικαθιστούμε στην (E) και έτσι, έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot 1 \cdot a_2 x^0 + 3\cdot 2 \cdot a_3 x^1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + 2a_0 x + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + (6a_3 + 2a_0)x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)a_{n+3} + n a_n + 2a_n\right]x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_2 = 0 \text{ και } 3a_3 + a_0 = 0) \text{ και } (n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+2)a_n = 0, \ n \geq 1$$

Άρα, $(n+2)\left[(n+3)a_{n+3} + a_n\right] = 0 \xrightarrow{n\geq 1} a_{n+3} = -\dfrac{a_n}{n+3}, \ n \geq 1$

Δηλαδή, προκύπτει ότι:

$a_2=0 \quad (1)$

$3a_3+a_0=0$

$a_{n+3}=-\dfrac{a_n}{n+3}, \quad n\geq 1$

Έτσι, εφόσον η δυναμοσειρά έχει 5 όρους τότε θα γραφεί σε μορφή:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

Για τα a_0 και a_1 απλώς γνωρίζουμε ότι προκύπτουν για κάποιες σταθερές $a_0=c_1$ και $a_1=c_2$

Επίσης το $a_2=0$ (από την (1))

Αλλά, $3a_3+a_0=0 \Rightarrow 3a_3+c_1=0 \Rightarrow a_3=-\dfrac{c_1}{3}$

Για $n=1$ στον αναδρομικό τύπο

έχουμε ότι:

$$a_4=-\frac{a_1}{4}=-\frac{c_2}{4}$$

Τότε $y=c_1+c_2x-\dfrac{c_1}{3}x^3-\dfrac{c_2}{4}x^4+\ldots=$

$$=c_1\left(1-\frac{x^3}{3}+\ldots\right)+c_2\cdot\left(x-\frac{x^4}{4}+\ldots\right), \quad c_1, c_2: \text{σταθερά}$$

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ – ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Εστω x_0 κανονικό ανώμαλο σημείο της εξίσωσης $(E): a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ωστε:

$$A_1(x) = \frac{a_1}{a_2}(x)\cdot(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n, \quad 0<|x-x_0|<R_1, \ A_1: D_1 \to \mathbb{R}$$

και

$$A_2(x) = \frac{a_0}{a_2}(x)(x-x_0)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n, \quad 0<|x-x_0|<R_2, \ A_2: D_2 \to \mathbb{R}$$

Ας είναι ακόμα $R=\min\{R_1,R_2\}$ και λ_1,λ_2 οι ρίζες της ενδεικτικής εξίσωσης της (E) στο x_0:

$$\lambda^2 + (p_0-1)\lambda + q_0 = 0 \quad \text{ωστε } \operatorname{Re}\lambda_1 \geq \operatorname{Re}\lambda_2$$

- Τοτε μια λύση y_1 της (E) είναι:
$$y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \quad 0<|x-x_0|<R \ \text{ με } c_0=1$$
- Τοτε μια δευτερη λύση y_2 γραμμικά ανεξάρτητη της y_1:
  i) για $\lambda_1-\lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ είναι: $y_2(x) = |x-x_0|^{\lambda_2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$, $0<|x-x_0|<R$ οπου $d_0=1$

  ii) για $\lambda_1=\lambda_2$ είναι: $y_2(x) = y_1(x)\cdot\log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$, $0<|x-x_0|<R$ οπου $d_0=0$

  iii) για $\lambda_1-\lambda_2 \in \mathbb{N}^*$ είναι: $y_2(x) = C_1\cdot y_1(x)\log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$, $0<|x-x_0|<R$ οπου $d_0=1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (C-6 Λυμενες (Χρηστος Φιλος) Αναλυτικά!!!)

(+ Ασκηση C-10 (sos) Λυμενες (Χρηστος Φιλος) + Ασκηση C-9 (sos))

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση:

$2xy'' + y' + xy = 0$ γύρω από το $x_0=0$

ΛΥΣΗ

$a_2(x) = 2x \Rightarrow a_2(0)=0$, Αρα το x_0 ανώμαλο

$A_1(x) = \frac{a_1}{a_2}(x)(x-x_0) = \frac{1}{2\cancel{x}}\cdot\cancel{x} = \frac{1}{2} \left(= \frac{1}{2}x^0 + 0\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + \dots\right)$ Αναλυτική

και

$A_2(x) = \frac{a_0}{a_2}(x)(x-x_0)^2 = \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}}\, x^2 = \frac{x^2}{2} \left(= 0\cdot x^0 + 0\cdot x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots\right)$ Αναλυτική

Επομένως, το $x_0=0$ κανονικό ανώμαλο σημείο

Επίσης, ενδεικτική εξίσωση είναι η εξής:

$\lambda^2 + (p_0-1)\lambda + q_0 = 0$ οπου $p_0=\frac{1}{2}$ και $q_0=0$

$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$ ή $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

Συνεπώς, από Θεώρημα 2:

$$y_1(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n \quad , \quad c_0 = 0$$

$$y_2(x) = |x|^{0} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad , \quad d_0 = 1 \quad \leftarrow \text{Αφού } \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Για την $y_1(x)$: Το $x > 0$:

Επομένως, $y(x) = x^{1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$

$$y_1'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n + x^{1/2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot x^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n + x^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n x^n =$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n + x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n \cdot x^n =$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n + \frac{1}{2}\right) x^n .$$

$$y_1''(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n + \frac{1}{2}\right) x^n + x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(n + \frac{1}{2}\right) n x^{n-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n + \frac{1}{2}\right) x^n + x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n + \frac{1}{2}\right) n x^n =$$

$$= x^{-3/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) + n\left(n + \frac{1}{2}\right) \right] c_n \cdot x^n =$$

$$= x^{-\frac{3}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) c_n \, x^n .$$

Έτσι, στη Δ.Ε. έχουμε:

$$2x y_1''(x) + y_1'(x) + x y_1(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x \cdot x^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) c_n x^n + x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n + \frac{1}{2}\right) x^n + x \cdot x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{-1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(2n+1) c_n \cdot x^n + x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^{n+2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{-1/2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} n(2n+1) c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^{n+2} \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n(2n+1) c_n + c_{n-2} \right) x^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ n(2n+1) c_n + c_{n-2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow c_n = -\dfrac{1}{n(2n+1)} c_{n-2} \end{cases}$$

Έχουμε βήμα −2 $\qquad \underline{\underline{n \geq 2}}$

Άρα, έχουμε 2 περιπτώσεις να αναλύσουμε τον παραπάνω αναδρομικό τύπο.

1^{η} περ) $\underline{n=2k} \geq 2 \Rightarrow k \geq 1$

$$C_{2k} = -\frac{1}{2k(2 2k+1)} C_{2k-2} = -\frac{1}{2k(4k+1)} C_{2k-2}, \quad k \geq 1$$

για $k=1$, για $k=2$, για $k=3$, ... για $k=k$

$$\cancel{C_2} = -\frac{1}{10} C_0, \quad \cancel{C_4} = -\frac{1}{36} \cancel{C_2}, \quad \cancel{C_6} = -\frac{1}{78} \cancel{C_4}, \quad C_{2k} = -\frac{1}{2k(4k+1)} \cancel{C_{2k-2}}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη:

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{10 \cdot 36 \cdot 78 \cdots 2k(4k+1)} = \frac{(-1)^k}{(2\cdot 5)(2\cdot 2\cdot 9)(2\cdot 3\cdot 13)\cdots(2k)(4k+1)} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k (5\cdot 1)(2\cdot 9)(3\cdot 13)\cdots(k)(4k+1)} = \frac{(-1)^k}{2^k k! \,(5\cdot 9\cdot 13\cdots(4k+1))}, \quad k \geq 1$$

2^{η} περ) $n = 2k-1 \geq 2 \Rightarrow k \geq \frac{3}{2}$ άρα για $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \geq 2$

$$C_{2k-1} = -\frac{1}{(2k-1)(4k-1)} C_{2k-3}, \quad k \geq 2$$

για $k=2$, για $k=k$

$$C_3 = -\frac{1}{3\cdot 7} C_1 = 0, \ \ldots, \ C_{2k-1} = 0.$$

Δηλαδή, $C_{2k-1} = 0$

Επομένως η λύση y_1 θα είναι:

$$y_1(x) = |x|^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!\,(5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1))} x^{2n}\right), \quad \forall x \neq 0$$

όμοια και για τη λύση y_2 $\forall x > 0$

Θα προκύψει ότι:

$d_1 = 0$ και $(n+1)(2n+1) d_{n+1} + d_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$

$$d_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(2n+1)} d_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$d_n = -\frac{1}{n(2n-1)} d_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Άρα, έχουμε βήμα -2

όμοια παίρνουμε τις 2 περιπτώσεις: $n=2k$, $n=2k-1$

και τελικά:

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!\,(3\cdot 7\cdots(4n-1))} x^{2n}, \quad \forall x \neq 0$$